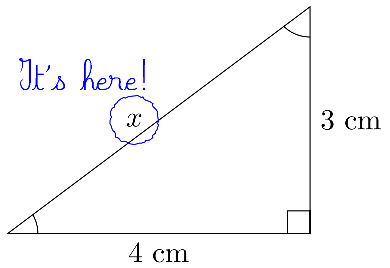
BTS

MATHEMATIQUES A L'USAGE DE L'ETUDIANT DE BAC PRO EN BTS

Chercher x.



"En mathématiques, on ne comprend pas les choses, on s'y habitue."
John Von Neumann (Mathématicien, physicien 1903-1957)

"Il n'y a pas de problème, il n'y a que des professeurs."
Jacques Prévert (Poète 1900-1977)

Sommaire

Chapitre 1

Calculs dans l'ensemble des réels

1.1 Calculs de base

1.1.1 Les fractions

Propriété 1.

Chaque dénominateur étant non nuls, on peut écrire :

$$\frac{a}{c} \pm \frac{b}{c} = \frac{a \pm b}{c} \qquad \overset{\text{exemple}}{\Longrightarrow} \qquad \frac{3}{5} - \frac{7}{5} = \frac{3-7}{5} = \frac{-4}{5} = -\frac{4}{5}$$

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad \pm bc}{bd} \qquad \overset{\text{exemple}}{\Longrightarrow} \qquad \frac{2}{3} + \frac{5}{4} = \frac{2 \times 4 + 5 \times 3}{3 \times 4} = \frac{8+15}{12} = \frac{23}{12}$$

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd} \qquad \overset{\text{exemple}}{\Longrightarrow} \qquad \frac{3}{7} \times \frac{2}{5} = \frac{3 \times 2}{7 \times 5} = \frac{6}{35}$$

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc} \qquad \overset{\text{exemple}}{\Longrightarrow} \qquad \frac{\frac{1}{4}}{\frac{7}{9}} = \frac{1}{4} \times \frac{9}{7} = \frac{9}{28}$$

Exercice 1
Donner l'écriture des nombres suivants sous la forme d'un entier ou d'une fraction irréductible.

$A = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$

$B = \left(1 - \frac{7}{3}\right) + \left(3 + \frac{5}{2}\right)$

$C = 2 \times \left(\frac{1}{3} - \frac{3}{4}\right) + \left(\frac{4}{5} - \frac{5}{3}\right)$

Solutions : $A = \frac{7}{12}$, $B = \frac{25}{6}$, $C = -\frac{17}{10}$

1.1.2 Les puissances

Propriété 2.

Pour tous réels a et b non nuls, m et n entiers, on peut écrire :

$$a^n \times a^m = a^{n+m} \quad \overset{\text{exemple}}{\Longrightarrow} \quad 2^3 \times 2^5 = 2^{3+5} = 2^8$$

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m} \quad \overset{\text{exemple}}{\Longrightarrow} \quad \frac{7^5}{7^2} = 7^{5-2} = 7^3$$

$$(a \times b)^n = a^n \times b^n \quad \overset{\text{exemple}}{\Longrightarrow} \quad (2 \times 5)^3 = 2^3 \times 5^3$$

$$(a^n)^m = a^{n\times n} \quad \overset{\text{exemple}}{\Longrightarrow} \quad (7^2)^5 = 7^{2\times 5} = 7^{10}$$

Exercice 2
Simplifier les nombres suivants :

$A = 3^3 \times 3^{-2} \times 3 \times 3^5$

$C = (3^2 \times 3^3)^2$

$B = \dfrac{2 \times 2^3 \times 2^4}{2^3 \times 2^6}$

$D = \dfrac{2^2 \times 3^4 \times 5^3}{5^2 \times 3^2 \times 2}$

Solutions : $A = 3^7$, $B = 2^{-1} = \dfrac{1}{2}$, $C = 3^{10}$, $D = 2 \times 3^2 \times 5$

1.1.3 Les racines carrées

Propriété 3.

Pour tous réels a et b positifs, on peut écrire :

$$(\sqrt{a})^2 = \sqrt{a^2} = a \quad \overset{\text{exemple}}{\Longrightarrow} \quad (\sqrt{3})^2 = \sqrt{9} = 3$$

$$\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b} \quad \overset{\text{exemple}}{\Longrightarrow} \quad \sqrt{4 \times 3} = \sqrt{4} \times \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$$

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \quad \overset{\text{exemple}}{\Longrightarrow} \quad \sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

⚠ $$\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b} \quad \overset{\text{contrexemple}}{\Longrightarrow} \quad \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$$
$$\sqrt{9} + \sqrt{16} = 3 + 4 = 7$$

Exercice 3
Simplifier l'écriture des nombres suivants :

$A = \sqrt{81}$ $\quad C = \sqrt{12}$ $\quad E = \sqrt{2} + 5\sqrt{2} - 3\sqrt{2}$

$B = \sqrt{8}$ $\quad D = \sqrt{36 + 64}$ $\quad F = (2 - \sqrt{3})^2$

Solutions : $A = 9$, $B = 2\sqrt{2}$, $C = 2\sqrt{3}$, $D = 10$, $E = 3\sqrt{2}$, $F = 7 - 4\sqrt{3}$.

1.2 Développer - Factoriser

On souhaite transformer des expressions algébriques pour les mettre sous différentes formes :

Définition 1.

- **Développer**, c'est transformer un produit de facteurs en une somme de facteurs.
- **Factoriser**, c'est transformer une somme de facteurs en un produit de facteurs.

Exemple 1

Expressions sous forme développée :
$A(x) = x - 2 - 14x + 5$
$B(t) = 3t^2 - 4t + 1$
$C(\alpha) = \alpha^3 + 6\alpha - 4$

Expressions sous forme factorisée :
$D(x) = -5(x + 1)$
$E(z) = (4z + 1)(z + 3)$
$F(t) = (2t - 3)^2$

Afin de factoriser ou développer des expressions, on utilise les propriétés de développement, ou très régulièrement les identités remarquables vues au collège :

Propriété 4.

- $k(a + b) = ka + kb$
- $(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$
- $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
- $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

1.2.1 Développement d'une expression

Dans les trois exercices de cette section, il s'agit de développer, réduire et ordonner les expressions données.

Exercice 4
Utilisation de la distributivité

$A(x) = -2(3x + 1)$
$B(x) = (2x + 3) - (3x + 2)$
$C(x) = 4(3x - 2)$

$D(x) = (2 - 5x)(x - 3)$
$E(x) = (x + 3)(x - 2)$
$F(x) = (-2x + 3)(x - 1)$

Solutions : $A(x) = -6x - 2$, $B(x) = -x + 1$, $C(x) = 12x - 8$, $D(x) = -5x^2 + 17x - 6$, $E(x) = x^2 + x - 6$, $F(x) = -2x^2 + 5x - 3$

Exercice 5
Utilisation des identités remarquables

$A(x) = (3x+4)^2$
$B(x) = (2x-3)^2$
$C(x) = (5x-2)(5x+2)$
$D(x) = (-2x-4)^2$

Solutions : $A(x) = 9x^2 + 24x + 16$, $B(x) = 4x^2 - 12x + 9$, $C(x) = 25x^2 - 4$, $D(x) = 4x^2 + 16x + 16$

Exercice 6
Certaines expressions sont plus complexes à développer car elles contiennent à la fois des distributivités et des identités remarquables : $A(x) = 4(2x+5) + (x-3)(5x-7)$
$B(x) = (2x-3)^2 - (4x+1)(x-3)$
$C(x) = (x-3)(x+5) - (-3x+2)(x-5)$

Solutions : $A(x) = 5x^2 - 14x + 41$, $B(x) = 12 - x$, $C(x) = 4x^2 - 15x - 5$

1.2.2 Factorisation d'une expression

Dans les trois exercices de cette section, il s'agit de factoriser au maximum les expressions données.

Exercice 7
Utilisation d'un facteur commun
Cette technique consiste à mettre en évidence un facteur commun dans la "somme" : on décompose en produit chaque terme de façon à trouver un facteur en commun le plus grand possible.

$A(x) = 15x - 12$
$B(x) = 5x - 5$
$C(x) = 6x^2 + 10x$
$D(x) = (3x+2)(4x-1) + (3x+2)(-6x+8)$
$E(x) = (3x-4)^2 - (2x-5)(3x-4)$
$F(x) = (2x-3)^2 - (2x-3)$

Solutions : $A(x) = 3(5x-4)$, $B(x) = 5(x-1)$, $C(x) = 2x(3x+5)$, $D(x) = (3x+2)(-2x+7)$, $E(x) = (3x-4)(x+1)$, $F(x) = (2x-3)(2x-4)$.

Exercice 8
Utilisation des identités remarquables
On tente de "comparer" notre expression à l'une des identités remarquables :

- S'il y a trois termes, ils peuvent être de la forme $a^2 + 2ab + b^2$ ou $a^2 - 2ab + b^2$,
- s'il y a deux termes, ils peuvent être de la forme : $a^2 - b^2$.

$A(x) = 9x^2 + 42x + 49$
$B(x) = 25x^2 - 60x + 36$
$C(x) = x^2 - 16$
$D(x) = 9x^2 - 64$

Solutions : $A(x) = (3x+7)^2$, $B(x) = (5x-6)^2$, $C(x) = (x-4)(x+4)$, $D(x) = (3x-8)(3x+8)$.

Exercice 9
Si vous avez un moment de libre, ou une envie d'approfondir ...
Il arrive pourtant qu'un facteur commun ne saute pas aux yeux, tout comme une identité remarquable. Dans ce cas, on examine chaque terme de la somme et on essaye de le factoriser.

$A(x) = (2x-5)(7+3x) - (4x^2 - 20x + 25)$
$B(x) = (x-3)(3x+5) + (9x^2 + 30x + 25)$
$C(x) = 3(x+3)(2x+3) - (4x^2 - 9)$
$D(x) = (2x-1)^2 - (3-5x)^2$

Solutions : $A(x) = (2x-5)(x+12)$, $B(x) = (3x+5)(4x+2)$, $C(x) = (2x+3)(x+12)$, $D(x) = (7x-4)(-3x+2)$.

1.3 Résolution d'équations

1.3.1 Équations du premier degré

Définition 2.

Une **équation du premier degré** est une équation de la forme $ax + b = 0$ avec $a \neq 0$ où x est l'inconnue. Résoudre une telle équation consiste à « trouver le nombre x » pour lequel $ax + b = 0$.

La théorie :

$ax + b = 0 \Longleftrightarrow ax = -b \Longleftrightarrow x = -\dfrac{b}{a}$ donc : $\mathcal{S} = \left\{-\dfrac{b}{a}\right\}$

La pratique :

$$\begin{array}{lrll} & -2x+4 & = 0 & \textit{on ajoute } -4 \textit{ des deux côtés de l'égalité} \\ \Longleftrightarrow & -2x & = -4 & \textit{on divise par } -2 \textit{ qui est non nul des deux côtés de l'égalité} \\ \Longleftrightarrow & x & = \dfrac{-4}{-2} & \textit{on simplifie} \\ \Longleftrightarrow & x & = 2 & \end{array}$$

On peut vérifier que lorsque l'on remplace x par 2 dans $-2x + 4$, on obtient $-2 \times 2 + 4 = 0$.

Exercice 10
Parmi la liste de nombres $\left\{0; 1; \dfrac{3}{2}; 4\right\}$ lesquels sont solutions des équations suivantes :

1. $-x + 1 = 0$.
2. $3x + 4 = 6x - 8$.
3. $x(2x - 3) = 0$.

Solutions : 1) $x = 1$ 2) $x = 8$ 3) $x = 0$ ou $x = \dfrac{3}{2}$.

Exercice 11
Résoudre les équations suivantes.

1. $x - 9 = -4$.
2. $-x + 5 = 12$.
3. $3x = -24$.
4. $3,7x = 0$.
5. $\dfrac{1}{4}x = 16$.
6. $5x - 9 = 3x + 4$.
7. $x - \dfrac{2}{3} = \dfrac{3}{4}$.
8. $\dfrac{3x}{4} = \dfrac{2}{3}$.

Solutions : 1) $x = 5$ 2) $x = -7$ 3) $x = -8$ 4) $x = 0$ 5) $x = 64$ 6) $x = \dfrac{13}{2}$ 7) $x = \dfrac{17}{12}$ 8) $x = \dfrac{8}{9}$.

Exercice 12
Pour approfondir ...
Développer chaque membre, puis résoudre les équations obtenues.

1. $4x - 5(3 - 2x) = 4 - (2x - 7)$.
2. $9x - 3(4 - 3x) = 2 - [35 - 3(4 - 2x)]$.
3. $7 - 3(4 - 2x) - 5[2 - 3(x - 5)] = 4 - 3(x - 4)$.
4. $4(x - 2) - 3[6 - 2(3 - 4x)] + 3(7 - 2x) = 0$.

Solutions : 1) $\frac{13}{8}$ 2) $-\frac{3}{8}$ 3) $\frac{53}{12}$ 4) $\frac{1}{2}$

1.3.2 Équation produit

Théorème 1.

Lorsque l'on a un produit de plusieurs facteurs qui doit être égal à 0, on utilise le théorème important suivant :
Un produit de facteurs est nul si et seulement si l'un des facteurs est nul :

$$A \times B = 0 \iff A = 0 \text{ ou } B = 0.$$

Exemple :

$$\begin{aligned} & (x+1)(x+11) = 0 \\ \iff & x+1 = 0 \text{ ou } x+11 = 0 \\ \iff & x = -1 \text{ ou } x = -11 \\ \iff & \mathcal{S} = \{-11; -1\}. \end{aligned}$$

Exercice 13
Résoudre les équations suivantes.

1. $(x-1)(x+2) = 0$.
2. $(2x+4)(3x-1) = 0$.
3. $(2+x)(2-3x) = 0$.
4. $-3(x-1) = 0$.
5. $(x+1)(3x-4)(2x-3) = 0$.
6. $\sqrt{2}(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5) = 0$.

Solutions : 1) $x = 1$ ou $x = -2$ 2) $x = -2$ ou $x = \frac{1}{3}$ 3) $x = -2$ ou $x = \frac{2}{3}$ 4) $x = 1$ 5) $x = -1$ ou $x = \frac{4}{3}$ ou $x = \frac{3}{2}$ 6) $x = 1$ ou $x = 2$ ou $x = 3$ ou $x = 4$ ou $x = 5$.

Exercice 14
Pour approfondir ...
Factoriser, puis résoudre les équations.

1. $(5x-2)(x+7) + (5x-2)^2 = 0$.
2. $2(3x+5) + (x+7)(3x+5) = 0$.
3. $(2x+3)^2 - (x+5)(2x+3) = 0$.
4. $(3x-2)^2 - 81 = 0$.

Solutions : (a) $-\frac{5}{6}$ ou $\frac{2}{5}$ (b) -9 ou $\frac{5}{3}$ (c) $-\frac{3}{2}$ ou 2 (d) $-\frac{7}{3}$ ou $\frac{11}{3}$

1.3.3 Résolution des systèmes de deux équations à deux inconnues : méthode par addition

Exemple 1 : Résoudre le système : $\begin{cases} 2x - 3y = 7 & L_1 \\ x + 5y = -3 & L_2 \end{cases}$

Dans L_1 on a $2x$ et dans L_2 on a x ; pour éliminer les x on va donc multiplier la ligne L_2 par -2 avant d'ajouter les deux lignes.

$$\begin{cases} 2x - 3y = 7 \\ x + 5y = -3 \qquad \color{red}{\times(-2)} \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} 2x - 3y = 7 \\ -2x - 10y = 6 \end{cases}$$

Ce qui donne par addition des deux lignes : $-13y = 13$ c'est à dire $y = -1$.

Puis on remplace y par -1 dans l'équation la plus simple, ici L_2, et on obtient : $x - 5 = -3$ donc $x = 2$.

La solution est donc $x = 2$ et $y = -1$.

Exemple 2 : Résoudre le système : $\begin{cases} 3x + 4y = 32 \qquad L_1 \\ 7x + 6y = 58 \qquad L_2 \end{cases}$

Dans L_1 on a $3x$ et dans L_2 on a $7x$; pour éliminer les x on va donc multiplier la ligne L_1 par 7 et la ligne L_2 par -3 avant d'ajouter les deux lignes.

$$\begin{cases} 3x + 4y = 32 \qquad \color{red}{\times 7} \\ 7x + 6y = 58 \qquad \color{red}{\times(-3)} \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} 21x + 28y = 224 \\ -21x - 18y = -174 \end{cases}$$

Ce qui donne par addition des deux lignes : $10y = 50$ c'est à dire $y = 5$.

Puis on remplace y par 5 dans l'équation la plus simple, ici L_1, et on obtient : $3x + 20 = 32$ donc $x = 4$.

La solution est donc $x = 4$ et $y = 5$.

Exercice 15
Résoudre les systèmes suivants :

a) $\begin{cases} x - 2y = -1 \\ 3x + y = 2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x - 2y = 2 \\ 5x + 3y = 1 \end{cases}$

Solutions : a) $x = \frac{3}{7}$, $y = \frac{5}{7}$ b) $x = \frac{8}{19}$, $y = -\frac{7}{19}$

Chapitre 2

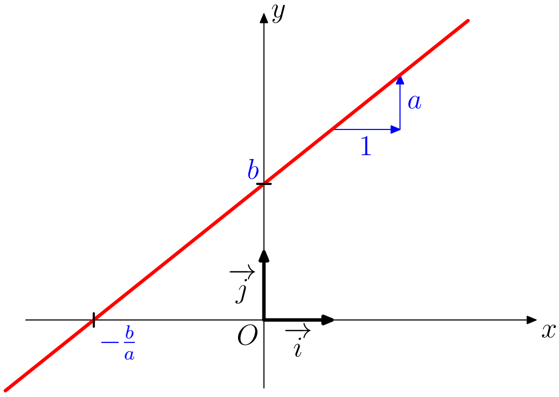
Les fonctions affines

Définition 1.

☞ Une fonction **affine** est une fonction définie sur un intervalle de $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax + b$; a et b étant des réels.

☞ a est le **coefficient directeur** et b l'**ordonnée à l'origine**.

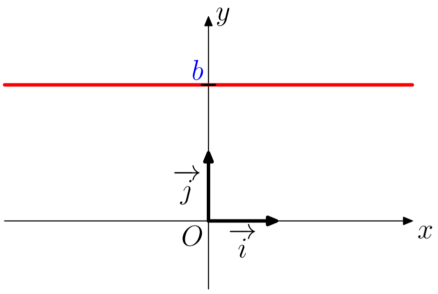
Représentation graphique : La courbe représentative d'une fonction affine est une droite.



✻ **Premier cas :** $\boxed{a > 0}$

Tableau de signe :

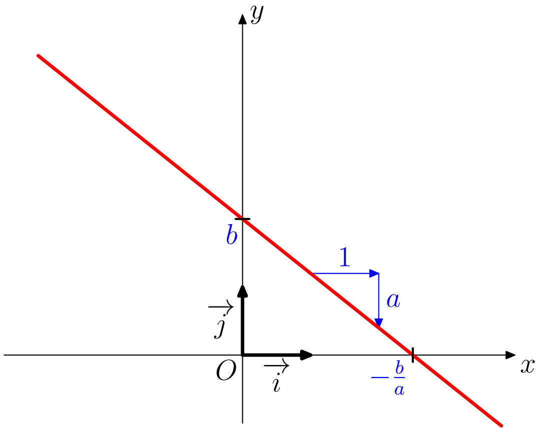
x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	



✻ **Deuxième cas :** $\boxed{a = 0}$

f est alors une fonction **constante** :

$$f(x) = b$$

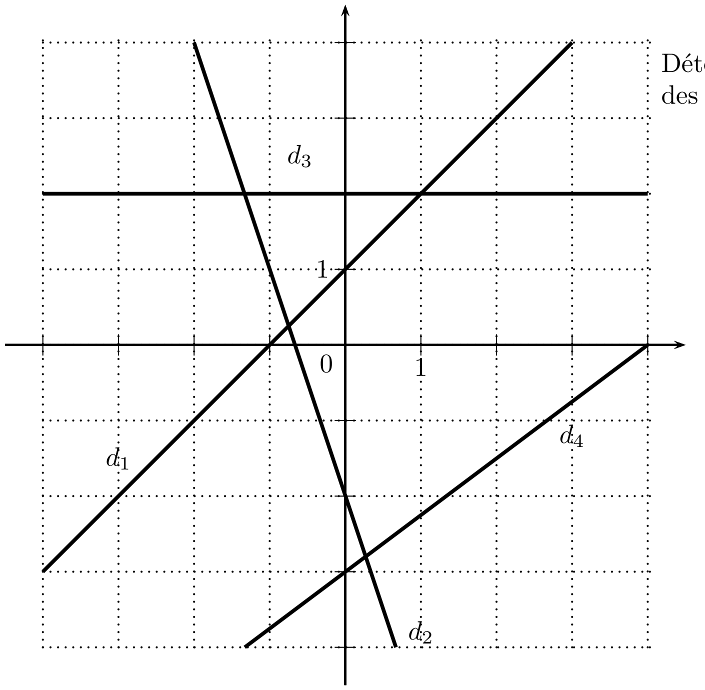


✻ **Troisième cas :** $\boxed{a < 0}$

Tableau de signe :

x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	

Exercice 1



Déterminer graphiquement une équation de chacune des droites ci-contre :

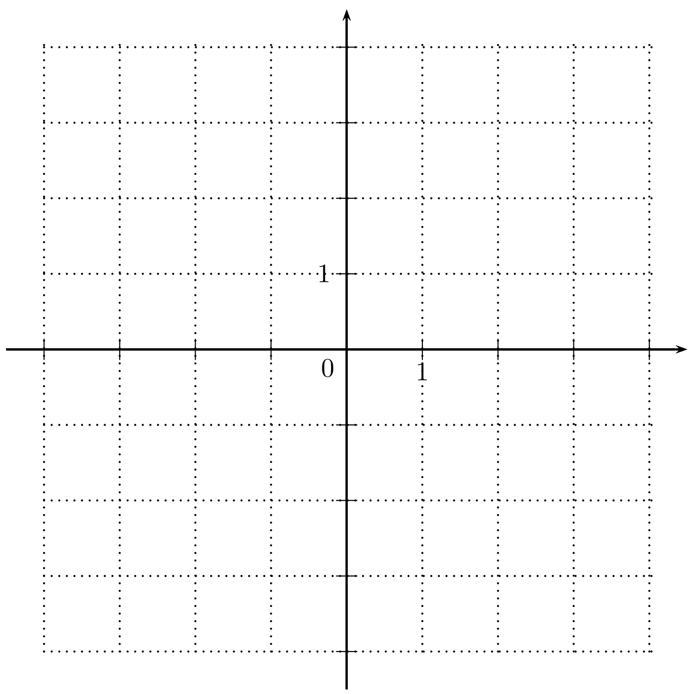
- Équation de d_1 : $f_1(x) =$ ....
- Équation de d_2 : $f_2(x) =$ ....
- Équation de d_3 : $f_3(x) =$ ....
- Équation de d_4 : $f_4(x) =$ ....

Solutions : $f_1(x) = x + 1$, $f_2(x) = -3x - 2$, $f_3(x) = 2$, $f_4(x) = \dfrac{3}{4}x - 3$

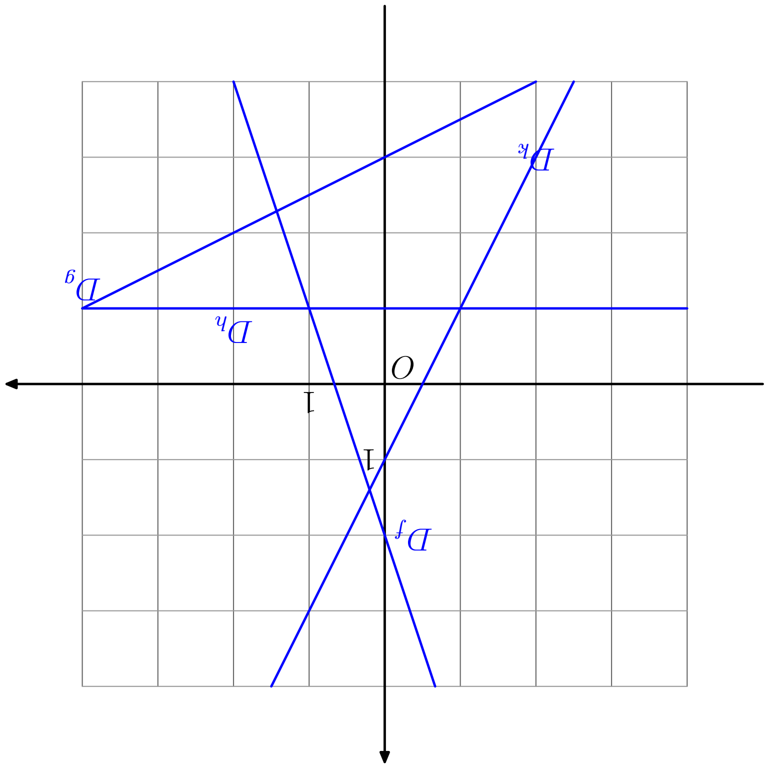
Exercice 2

Dans le repère orthonormé (O, I, J) ci-contre, tracer les fonctions suivantes :

- $f(x) = -3x + 2$.
- $g(x) = \dfrac{1}{2}x - 3$.
- $h(x) = -1$.
- $k(x) = (x + 1)^2 - x^2$.



Solutions :



Exercice 3
Déterminer le tableau de signes des deux fonctions suivantes : $f(x) = -3x + 1$ et $g(x) = 2x + 5$.

Solutions :

x	$-\infty$	$-\frac{5}{2}$	$+\infty$
$g(x)$	$-$	0	$+$

x	$-\infty$	$\frac{1}{3}$	$+\infty$
$f(x)$	$+$	0	$-$

Exercice 4
Déterminer une fonction f pouvant être représentée par le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$	3	$+\infty$
signe de $f(x)$	$+$	0	$-$

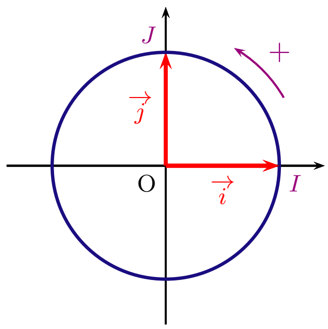
Solution : $f(x) = -x + 3$

Chapitre 3

Trigonométrie

3.1 L'essentiel

3.1.1 Cercle trigonométrique



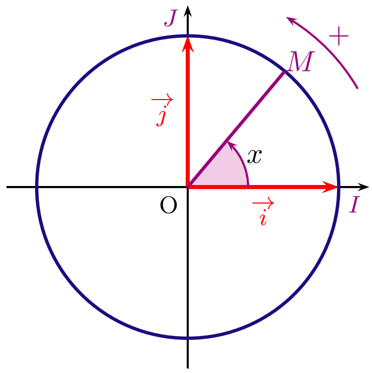
Le plan est muni d'un repère orthonormal (O,I,J)
Le cercle trigonométrique est le cercle de centre O, de rayon 1 orienté dans le sens direct.

repérage d'un point sur le cercle trigonométrique

Par enroulement de la droite réelle sur le cercle trigonométrique $\mathcal{C}$ on peut associer à tout réel x un unique point M de $\mathcal{C}$
Si le point M est associé à un réel x, alors il est associé à tout réel de la forme $x + k \times 2\pi$ où k est un entier relatif.

mesures d'un angle orienté

Soit x un réel et M un point du cercle trigonométrique repéré par x.
On dit que x est une mesure en radians de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM}\right)$.
Par convention on note alors $\left(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM}\right) = x + 2k\pi$ où k est un entier relatif et on dit que $\left(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM}\right)$ à pour mesure x radians à 2π près.



REMARQUE :

La mesure d'un angle géométrique en radians est proportionnelle à sa mesure en degrés :

Degrés	0°	30°	45°	60°	90°	120°	180°
x en radians	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	π

mesure principale

Propriété 1.

La mesure principale d'un angle orienté est l'unique mesure de cet angle appartenant à l'intervalle $]-\pi; \pi]$.

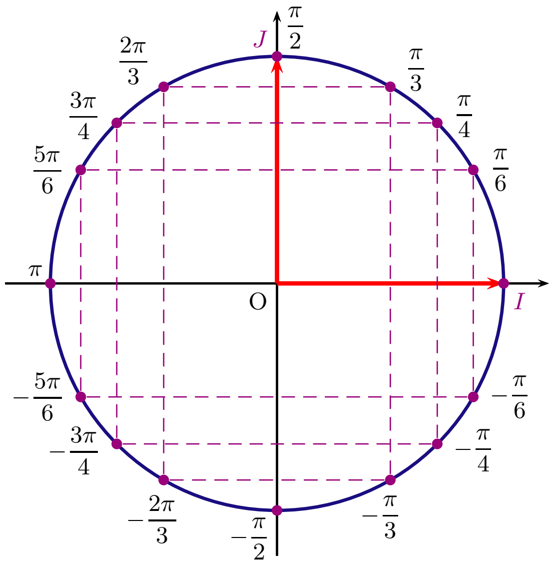
EXEMPLE :

Déterminer la mesure principale des angles de mesures respectives $\dfrac{39\pi}{7}$ et $\left(-\dfrac{18\pi}{5}\right)$

— On cherche α dans l'intervalle $]-\pi;\pi]$ et un entier k tel que $\dfrac{39\pi}{7} = \alpha + k \times 2\pi$.
Comme $5 < \dfrac{39\pi}{7} < 6$ et 6 pair, alors $-1 < \dfrac{39\pi}{7} - 6 < 0$ donc la mesure principale de $\dfrac{39\pi}{7}$ est $\left(\dfrac{39\pi}{7} - 6\pi\right)$ soit $-\dfrac{3\pi}{7}$

— On cherche α dans l'intervalle $]-\pi;\pi]$ et un entier k tel que $\left(-\dfrac{18\pi}{5}\right) = \alpha + k \times 2\pi$.
Comme $-4 < -\dfrac{11}{5} < -3$ et 4 pair, alors $0 < -\dfrac{18}{5} + 4 < 1$ donc la mesure principale de $\left(-\dfrac{18\pi}{5}\right)$ est $\left(-\dfrac{18\pi}{5} + 4\pi\right)$ soit $\dfrac{2\pi}{5}$

mesures principales remarquables



3.1.2 cosinus et sinus d'un réel

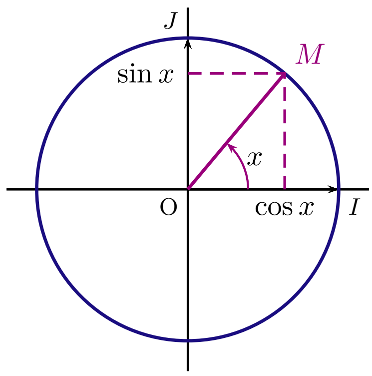
définition

Propriété 2.

Soit x une mesure en radians de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM}\right)$ où M est un point du cercle trigonométrique.

— Le cosinus de x, noté $\cos x$, est l'abscisse du point M.

— Le sinus de x, noté $\sin x$, est l'ordonnée du point M.



propriétés

Propriété 3.

- Pour tout réel x et pour tout entier relatif k, $\cos(x+2k\pi)=\cos x$ et $\sin(x+2k\pi)=\sin x$
- Pour tout réel x, $-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$ et $-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$
- Pour tout réel x, $\cos^2 x+\sin^2 x=1$

EXEMPLE :

Sachant que $\sin x=-\dfrac{\sqrt{5}}{3}$ avec $-\dfrac{\pi}{2}<x<0$, déterminer la valeur exacte de $\cos x$.

Pour tout réel x, $\cos^2 x+\sin^2 x=1$ donc $\cos^2 x+\dfrac{5}{9}=1$, soit $\cos^2 x=\dfrac{4}{9}$.

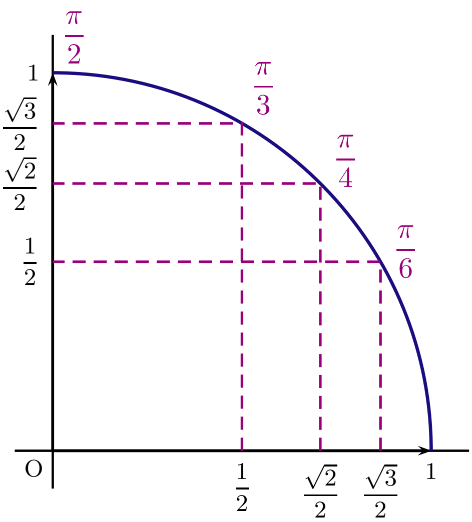
Il existe deux valeurs possibles du cosinus :

$$\cos x=-\frac{2}{3} \qquad \text{ou} \qquad \cos x=\frac{2}{3}$$

Comme $-\dfrac{\pi}{2}<x<0$, alors $\cos x>0$ donc $\cos x=\dfrac{2}{3}$.

valeurs remarquables

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

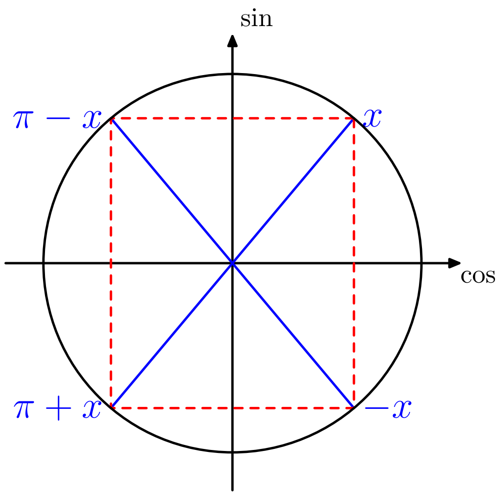


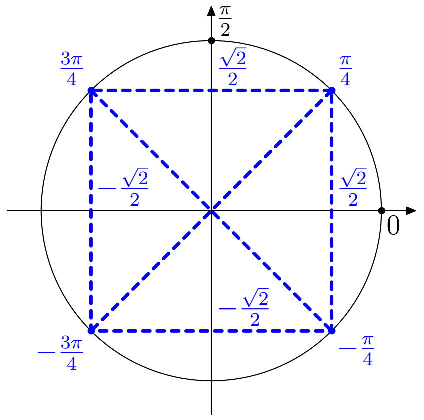
Pour tout réel x :

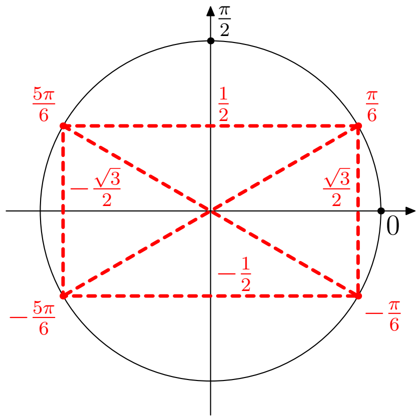
$\begin{cases} \cos(-x)=\cos x \\ \sin(-x)=-\sin x \end{cases}$

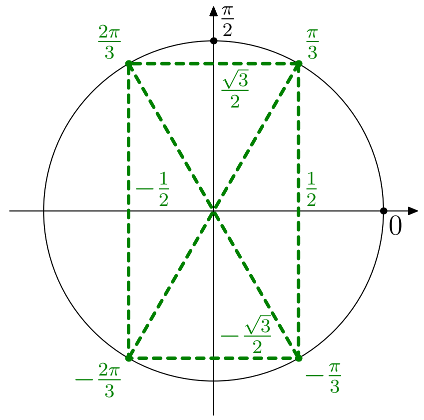
$\begin{cases} \cos(\pi+x)=-\cos x \\ \sin(\pi+x)=-\sin x \end{cases}$

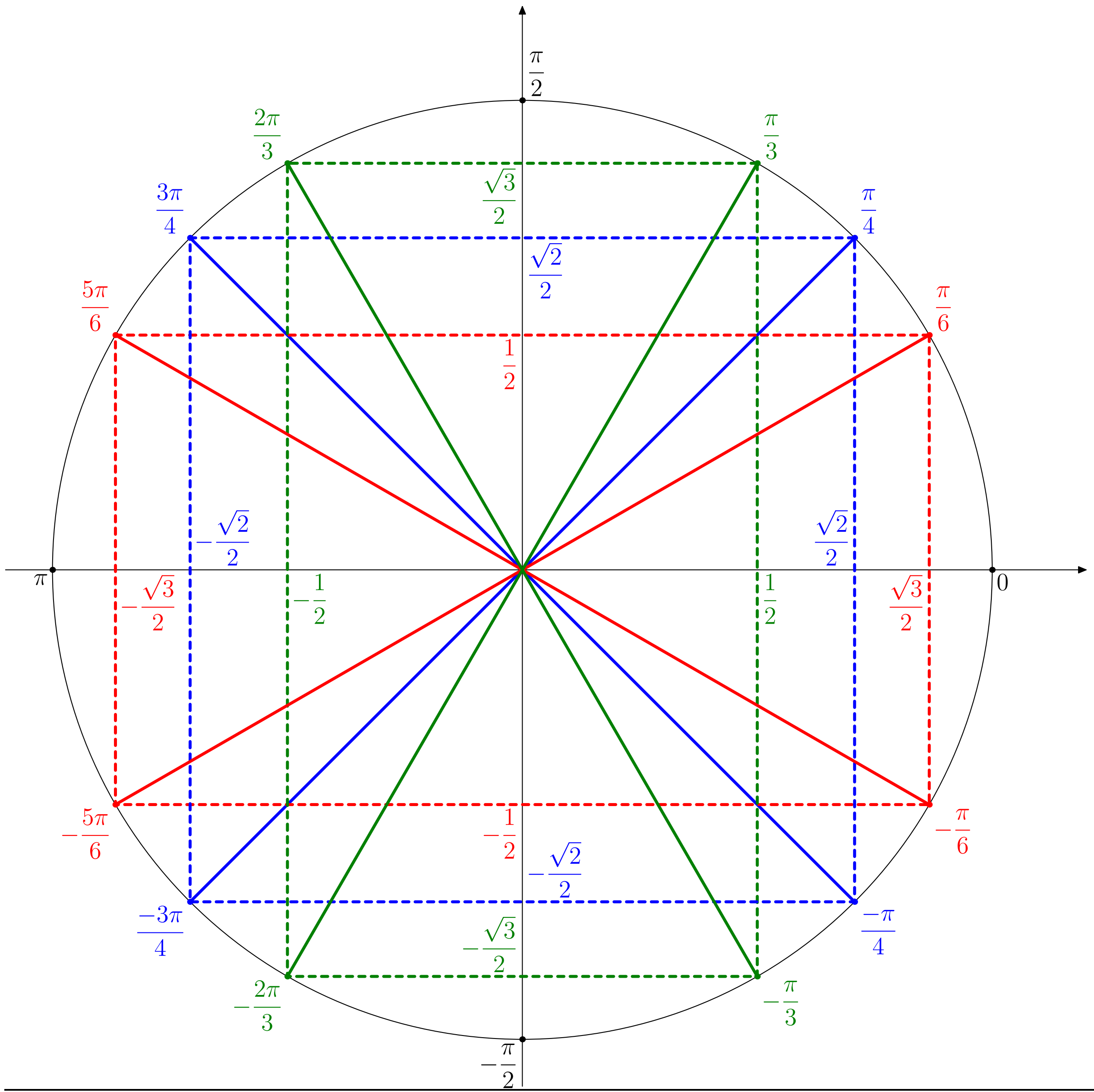
$\begin{cases} \cos(\pi-x)=-\cos x \\ \sin(\pi-x)=\sin x \end{cases}$




$\frac{\pi}{2}$
$\frac{3\pi}{4}$
$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{\pi}{4}$
$-\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{\sqrt{2}}{2}$
0
$-\frac{\sqrt{2}}{2}$
$-\frac{3\pi}{4}$
$-\frac{\pi}{4}$


$\frac{\pi}{2}$
$\frac{5\pi}{6}$
$\frac{1}{2}$
$\frac{\pi}{6}$
$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\frac{\sqrt{3}}{2}$
0
$-\frac{1}{2}$
$-\frac{5\pi}{6}$
$-\frac{\pi}{6}$

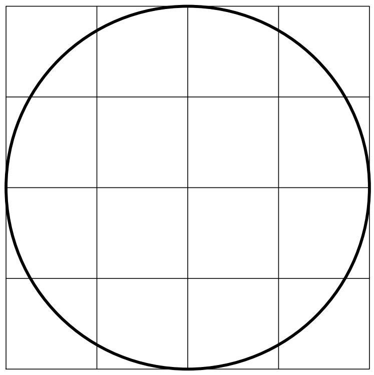

$\frac{2\pi}{3}$
$\frac{\pi}{2}$
$\frac{\pi}{3}$
$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$-\frac{1}{2}$
$\frac{1}{2}$
0
$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
$-\frac{2\pi}{3}$
$-\frac{\pi}{3}$


$\frac{\pi}{2}$
$\frac{2\pi}{3}$
$\frac{\pi}{3}$
$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\frac{3\pi}{4}$
$\frac{\pi}{4}$
$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{5\pi}{6}$
$\frac{\pi}{6}$
$\frac{1}{2}$
$-\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{\sqrt{2}}{2}$
π
$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
$-\frac{1}{2}$
$\frac{1}{2}$
$\frac{\sqrt{3}}{2}$
0
$-\frac{5\pi}{6}$
$-\frac{1}{2}$
$-\frac{\pi}{6}$
$-\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{-3\pi}{4}$
$\frac{-\pi}{4}$
$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
$-\frac{2\pi}{3}$
$-\frac{\pi}{3}$
$-\frac{\pi}{2}$

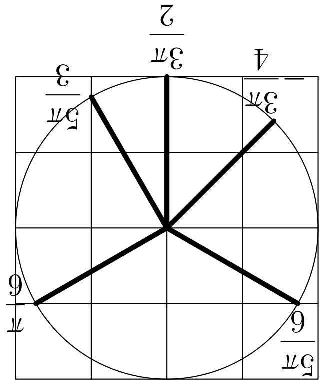
Exercice 1

Compléter le tableau suivant et placer les points correspondant sur le cercle trigonométrique :

x	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{6}$	$-\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$
$\cos x$					
$\sin x$					



Correction :

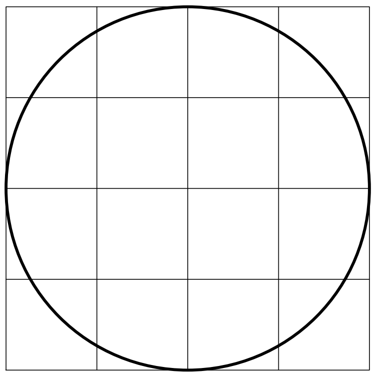


x	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{6}$	$-\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$
$\cos x$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin x$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1

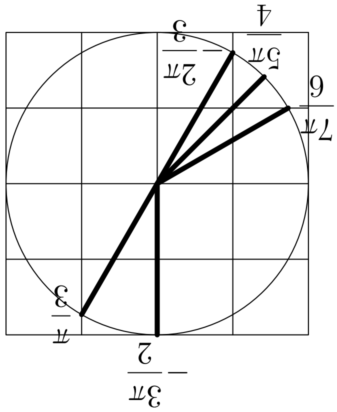
Exercice 2

Compléter le tableau suivant et placer les points correspondant sur le cercle trigonométrique :

x	$\frac{\pi}{3}$	$-\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{7\pi}{6}$	$-\frac{3\pi}{2}$
$\cos x$					
$\sin x$					



Correction :



x	$\frac{\pi}{3}$	$-\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{7\pi}{6}$	$-\frac{3\pi}{2}$
$\cos x$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	0
$\sin x$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1

Chapitre 4

Le second degré

4.1 Équations et factorisation

$P(x) = ax^2 + bx + c$, où $a \neq 0$ $\quad \Delta = b^2 - 4ac$ est le discriminant de $ax^2 + bx + c$.

	Solutions de $P(x) = 0$	Factorisation
$\Delta > 0$	Deux solutions distinctes : $x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$	$P(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$
$\Delta = 0$	Une solution double : $x_0 = \dfrac{-b}{2a}$	$P(x) = a(x - x_0)^2$
$\Delta < 0$	pas de solution	pas de factorisation

Exemples

Exemple 1 $\quad$ Soit $f(x) = x^2 - 3x + 4$

Résoudre $f(x) = 0$ puis factoriser $f(x)$ si c'est possible.

Correction :

$f(x) = 0$ est une équation du second degré ; $a = 1$, $b = -3$ et $c = 4$.

Le discriminant est $\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \times 1 \times 4 = 9 - 16 = -7$

$\Delta < 0$ donc l'équation n'a pas de solution et on ne peut pas factoriser $f(x)$.

Exemple 2 $\quad$ Soit $f(x) = 3x^2 - \dfrac{7}{2}x + \dfrac{49}{48}$

Résoudre $f(x) = 0$ puis factoriser $f(x)$ si c'est possible.

Correction :

$f(x) = 0$ est une équation du second degré ; $a = 3$, $b = -\dfrac{7}{2}$ et $c = \dfrac{49}{48}$.

Le discriminant est $\Delta = b^2 - 4ac = \left(-\dfrac{7}{2}\right)^2 - 4 \times 3 \times \dfrac{49}{48} = \dfrac{49}{4} - \dfrac{49}{4} = 0$

$\Delta = 0$ donc l'équation a une unique solution $x_0 = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{-\frac{7}{2}}{6} = \dfrac{7}{12}$

$f(x)$ se factorise en $f(x) = a(x - x_0)^2 = 3\left(x - \dfrac{7}{12}\right)^2$

<u>Exemple 3</u> Soit $f(x) = x^2 - x - 1$

Résoudre $f(x) = 0$ puis factoriser $f(x)$ si c'est possible.

Correction :

$f(x) = 0$ est une équation du second degré ; $a = 1$, $b = -1$ et $c = -1$.

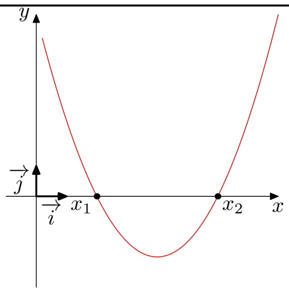
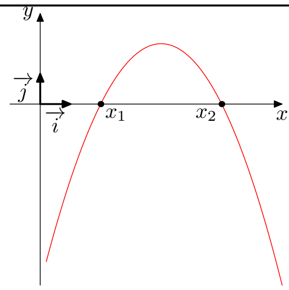
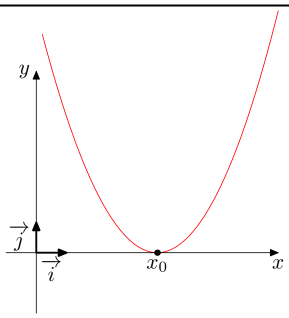
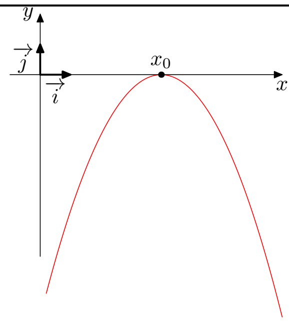
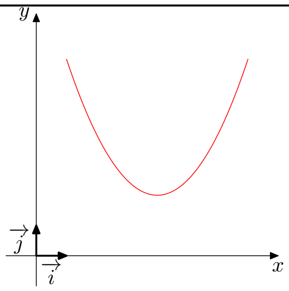
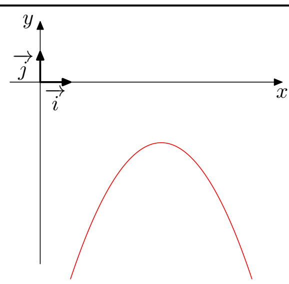
Le discriminant est $\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \times 1 \times (-1) = 5$

$\Delta > 0$ donc l'équation a deux solutions $x_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $x_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$

$f(x)$ se factorise en $f(x) = a(x-x_1)(x-x_2) = \left(x - \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(x - \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$

4.2 Signe

La courbe d'une fonction du second degré est une parabole, elle a "la tête en bas " quand a est positif et "la tête en haut" quand a est négatif.

<table>
<tr><th></th><th>$a > 0$</th><th>$a < 0$</th><th>Signe</th></tr>
<tr><td>$\Delta > 0$</td><td></td><td></td><td><table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>x_1</td><td></td><td>x_2</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$P(x)$</td><td>signe de a</td><td>0</td><td>signe de $-a$</td><td>0</td><td>signe de a</td></tr></table></td></tr>
<tr><td>$\Delta = 0$</td><td></td><td></td><td><table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>x_0</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$P(x)$</td><td>signe de a</td><td>0</td><td>signe de a</td></tr></table></td></tr>
<tr><td>$\Delta < 0$</td><td></td><td></td><td><table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$P(x)$</td><td colspan="2">signe de a</td></tr></table></td></tr>
</table>

En résumé : $\boxed{P(x) \text{ est du signe de } a \text{ sauf entre les racines, s'il y en a.}}$

4.2.1 Exemples

Faire le tableau de signe des quatre fonctions suivantes :

$f(x) = 2x^2 - 3x + 3\,; \quad g(x) = x^2 - x + \dfrac{1}{4}\,; \quad h(x) = x^2 - 3x + 2\,; \quad k(x) = -2x^2 + 6x + 8$

✻ $f(x) = 2x^2 - 3x + 3$ est une fonction polynôme du second degré.

$\Delta = (-3)^2 - 4 \times 2 \times 3 = -15.$

$\Delta < 0$ et $a > 0$ donc le tableau de signe est :

x	$-\infty$		$+\infty$
$f(x)$		$+$	

✻ $g(x) = x^2 - x + \dfrac{1}{4}$ est une fonction polynôme du second degré.

$\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times \dfrac{1}{4} = 0.$

$\Delta = 0$ donc $g(x)$ a une unique racine $x_0 = \dfrac{1}{2}$.

$\Delta = 0$ et $a > 0$ d'où le tableau de signe :

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$+$	

✻ $h(x) = x^2 - 3x + 2$ est une fonction polynôme du second degré.

$\Delta = (-3)^2 - 4 \times 1 \times 2 = 1.$

$\Delta > 0$ donc $h(x)$ a deux racines $x_1 = \dfrac{3+1}{2} = 2$ et $x_2 = \dfrac{3-1}{2} = 1$.

$\Delta > 0$ et $a > 0$ d'où le tableau de signe :

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$h(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

✻ $k(x) = -2x^2 + 6x + 8$ est une fonction polynôme du second degré.

$\Delta = 6^2 - 4 \times (-2) \times 8 = 100.$

$\Delta > 0$ donc $k(x)$ a deux racines $x_1 = \dfrac{-6+10}{-4} = -1$ et $x_2 = \dfrac{-6-10}{-4} = 4$.

$\Delta > 0$ et $a < 0$ d'où le tableau de signe :

x	$-\infty$		-1		4		$+\infty$
$k(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Chapitre 5

Dérivation et étude de fonction

5.1 L'essentiel

5.1.1 Nombre dérivé

Définition 1.

Soit f une fonction numérique, définie sur un intervalle I.
On dit que f est **dérivable** en un point x_0 de I si la quantité

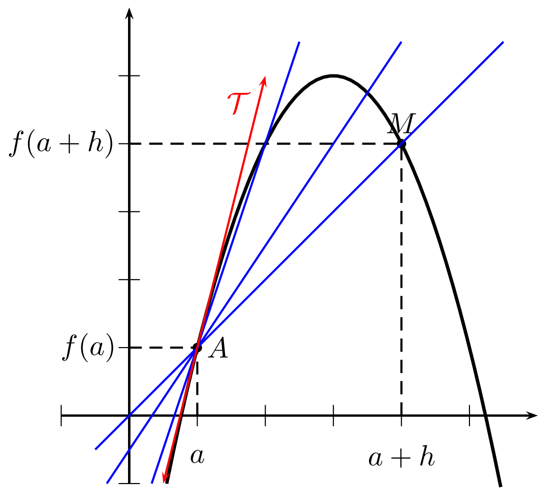
$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}.$$

admet une limite finie quand h tend vars 0.
Cette limite est appelée **nombre dérivé** en x_0 et notée $f'(x_0)$.

Les physiciens privilégient la notation de Leibniz : $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

Interprétation graphique :
Lorsque h se rapproche de 0, le point M se rapproche du point A. Ainsi, la droite (AM) se rapproche de la tangente $\mathcal{T}$ au point A

$f'(a)$ correspond au coefficient directeur de la tangente $\mathcal{T}$ au point d'abscisse a.



A noter qu'en physique, la vitesse $v(t)$ en un point de date t est le nombre dérivé de la fonction $x=f(t)$. On note $v(t)=f'(t)=\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$.

5.1.2 Tableaux des dérivées

Définition 2.

Soit f une fonction dérivable en tout point x d'un intervalle I, alors la fonction qui à x associe $f'(x)$ est appelé **fonction dérivée** de f sur I.

Pour obtenir les formules des dérivées, on utilise la définition du nombre dérivé :

Exemple 1
Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$.

- $\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} = \dfrac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \dfrac{\cancel{x^2} + 2xh + h^2 - \cancel{x^2}}{h} = \dfrac{\cancel{h}(2x+h)}{\cancel{h}} = 2x + h.$
- donc, $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} (2x+h) = 2x$.

On obtient le tableau de dérivation suivant :

Fonction f	Fonction f'	Intervalle I
k	0	$\mathbb{R}$
$ax+b$	a	$\mathbb{R}$
x^n	nx^{n-1}	$\mathbb{R}$, avec $n \in \mathbb{N}^*$
$\dfrac{1}{x}$	$-\dfrac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$
$\sin(x)$	$\cos(x)$	$\mathbb{R}$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$	$\mathbb{R}$
$\sin(\omega t + \varphi)$	$\omega \cos(\omega t + \varphi)$	$\mathbb{R}$
$\cos(\omega t + \varphi)$	$-\omega \sin(\omega t + \varphi)$	$\mathbb{R}$

A noter qu'en prenant $\omega = 1$ et $\varphi = 0$, on retrouve les formules précédentes.

Exemple 2

- si $f(x) = \pi$, alors $f'(x) = 0$;
- si $f(x) = x^{2014}$, alors $f'(x) = 2014\, x^{2013}$;
- si $f(t) = \cos(2t - 3)$, alors $f'(x) = -2\sin(2t-3)$.

Dans le cas de fonctions plus complexes, on a les formules suivantes :
u et v sont deux fonctions définies et dérivables sur un même intervalle I.

Opération	Fonction	Dérivée
Addition	$u+v$	$u'+v'$
Multiplication	$k \times u$ avec $k \in \mathbb{R}$	$k \times u'$
Produit	$u \times v$	$u' \times v + u \times v'$
Inverse	$\dfrac{1}{v}$	$-\dfrac{v'}{v^2}$
Quotient	$\dfrac{u}{v}$	$\dfrac{u' \times v - u \times v'}{v^2}$

A noter qu'en prenant $u = 1$, on retrouve la formule précédente.

Exemple 3

- $f(x) = x^3 + x + 3$ définie sur $\mathbb{R}$.
  Formule : $(u+v)' = u' + v'$ avec $u(x) = x^3$ et $v(x) = x + 3$.
  On obtient $f'(x) = 3x^2 + 1$.
- $f(x) = 3(x^2 + 4)$ définie sur $\mathbb{R}$.
  Formule : $(ku)' = ku'$ avec $k = 3$ et $u(x) = x^2 + 4$.
  On obtient $f'(x) = 6x$.
- $f(x) = (-2x+3)(5x-3)$ définie sur $\mathbb{R}$.
  Formule : $(uv)' = u'v + uv'$ avec $u(x) = -2x + 3$ et $v(x) = 5x - 3$.
  On obtient $f'(x) = -20x + 21$.

- $f(x) = \dfrac{1}{-3x+1}$ définie sur $\mathbb{R} - \left\{\frac{1}{3}\right\}$.
  Formule : $\left(\dfrac{1}{v}\right)' = -\dfrac{v'}{v^2}$ avec $v(x) = -3x+1$.
  On obtient $f'(x) = \dfrac{3}{(-3x+1)^2}$.

- $f(x) = \dfrac{3x-4}{x^2+3}$ définie sur $\mathbb{R}$.
  Formule $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v-uv'}{v^2}$ avec $u(x) = 3x-4$ et $v(x) = x^2+3$.
  On obtient $f'(x) = \dfrac{-3x^2+8x+9}{(x^2+3)^2}$.

Exercice 1
Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

1) $f(x) = 4x^2 - 3x + 1$
2) $f(x) = -2x^3 + x^2$
3) $f(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{3}{x^4}$
4) $f(x) = 2x - 4 + \dfrac{3}{x}$

5) $f(x) = \dfrac{1}{x+3}$
6) $f(x) = \dfrac{3}{x^2-5x}$
7) $f(x) = (2x+3)(3x-7)$
8) $f(x) = (5x^3-2x)(x-9)$

9) $f(x) = \dfrac{2x+1}{3x-1}$
10) $f(x) = \dfrac{2x^2-5x+3}{x-3}$
11) $f(x) = \dfrac{x^2+4}{x^2+1}$

Correction

1) $f'(x) = 8x - 3$ $\boxed{(x^n)' = nx^{n-1}}$

2) $f'(x) = -6x^2 + 2x$

3) $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{12}{x^5}$ $\boxed{\left(\dfrac{1}{x^n}\right)' = -\dfrac{n}{x^{n+1}}}$

4) $f'(x) = 2 - \dfrac{3}{x^2}$

5) $f'(x) = -\dfrac{1}{(x+3)^2}$ $\boxed{\left(\dfrac{1}{u}\right)' = -\dfrac{u'}{u^2}}$

6) $f'(x) = \dfrac{-3(2x-5)}{(x^2-5x)^2}$

7) $f'(x) = 2(3x-7) + 3(2x+3) = 12x - 5$ $\boxed{(uv)' = u'v + uv'}$

8) $f'(x) = (15x^2-2)(x-9) + (5x^3-2x) = 20x^3 - 135x^2 - 4x + 18$

9) $f'(x) = \dfrac{2(3x-1) - 3(2x+1)}{(3x-1)^2} = \dfrac{-5}{(3x-1)^2}$ $\boxed{\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v-uv'}{v^2}}$

10) $f'(x) = \dfrac{(4x-5)(x-3) - (2x^2-5x+3)}{(x-3)^2} = \dfrac{2x^2-12x+12}{(x-3)^2}$

11) $f'(x) = \dfrac{2x(x^2+1) - 2x(x^2+4)}{(x^2+1)^2} = \dfrac{-6x}{(x^2+1)^2}$

5.1.3 Lien avec le sens de variation

Propriété 1.

On suppose que f est dérivable sur I.

- f est croissante sur $I \iff f'(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in I$.
- f est décroissante sur $I \iff f'(x) \leqslant 0$ pour tout $x \in I$.
- f est constante sur $I \iff f'(x) = 0$ pour tout $x \in I$.

Il est donc possible de déterminer les variations d'une fonction à partir du signe de sa dérivée.

Exemple 4
Soit $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x - 1$, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. Déterminons son sens de variation :

- pour tout réel x on a $f'(x) = 6x^2 - 6x - 12 = 6(x^2 - x - 2)$;
- on détermine le signe de $x^2 - x - 2$ en cherchant ses racines, on trouve -1 et 2 ;
  $f'(x) = 6(x+1)(x-2)$ est positive sauf entre ses racines -1 et 2 ;
- on détermine le signe de la dérivée et on en déduit les variations de la fonction f :

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
variations de f	$-\infty$	$\nearrow$	6	$\searrow$	-21	$\nearrow$	$+\infty$

- f est croissante sur $]-\infty\,;-1\,]$ et sur $[\,2\,;+\infty\,[$ et décroissante sur $[\,-1\,;\,2\,]$.

Exercice 2
Etudier les variations des fonctions suivantes définies sur I : c'est à dire, pour chacune d'entre elles :

— Calculer sa dérivée.
— Etudier le signe de cette dérivée.
— Etablir son tableau de variations complet.

a) f définie sur $I = [-4;4]$ par $f(x) = x^2 - 6x + 3$.

b) f définie sur $I =]1;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{3x+1}{2x-2}$

c) f définie sur $[-2;3]$ par $f\,(x) = -x^3 + \dfrac{3}{2}x^2 + 6x - 1$.

Correction :

a) Dérivée : $f'(x) = 2x - 6$.

Signe : Pour $x = 3$, $f'(x) < 0$ pour $x < 3$ et $f'(x) > 0$ pour $x > 3$, d'où le tableau de variations ci-dessous.
On calcule ensuite $f(-4)$, $f(3)$ et $f(4)$ à l'aide du tableur de la calculatrice pour compléter le tableau.

x	-4		3		4
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	43	$\searrow$	-6	$\nearrow$	-5

b) Dérivée : $f'(x) = \dfrac{3(2x-2) - 2(3x+1)}{(2x-2)^2} = \dfrac{6x - 6 - 6x - 2}{(2x-2)^2} = \dfrac{-8}{(2x-2)^2}$.

Signe :Un carré étant toujours positif, on a donc $f'(x) < 0$ pour tout $x \in]1; +\infty[$, d'où le tableau de variations ci-dessous :

x	1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	
$f(x)$		$\searrow$	

c) Dérivée : $f'(x) = -3x^2 + 3x + 6$.

Signe : $\Delta = 3^2 - 4 \times (-3) \times 6 = 81 = 9^2 > 0$. $f'(x) = 0$ admet donc 2 solutions :
$x_1 = \frac{-3-9}{2\times(-3)} = 2$ et $x_2 = \frac{-3+9}{2\times(-3)} = -1$.

D'après le théorème sur le signe d'un trinôme, $f'(x)$ est donc négative, sauf entre -1 et 2 où elle est positive.

On calcule ensuite $f(-2)$, $f(-1)$, $f(2)$ et $f(3)$ à l'aide du tableur de la calculatrice pour compléter le tableau de variations ci-dessous.

x	-2		-1		2		3
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	1	$\searrow$	$-4,5$	$\nearrow$	9	$\searrow$	$3,5$